

# Simulation numérique de la convection naturelle d'un liquide soumis à des conditions pariétales variables

Mahfoud Kadja\*, Rabah Hacene

Institut de génie mécanique, université de Constantine, 25000 Constantine, Algérie

(Reçu le 8 mars 1998, accepté le 5 janvier 1999)

Abridged English version at the end of the text

**Abstract** — Numerical simulation of natural convection of a liquid under variable boundary conditions. The present work determines numerically and analyses the dynamic and thermal fields resulting from natural convection in vertical cylinders partially filled with a liquid. The finite difference method has been used to solve the equations governing these flows. Two different types of boundary conditions were implemented in the solution of these equations: in the first case, a temperature which varies sinusoidally on all the boundaries of the cylinder was imposed and, in the second case, a sinusoidal heat flux was imposed. In the case of variable wall temperature, it was noticed that the flow becomes more and more complex and passes from a monocellular structure at the beginning of the period to a multicellular structure at the end of the period, provoked by the differences in temperature that appear within the fluid. Also, despite the imposition of the same temperature on all walls, it was observed that the majority of the heat is exchanged through the vertical wall of the cylinder. In the case of variable wall flux, a nearly constant local heat transfer was predicted for all walls but the mean transfer was larger for the transversal wall. The flow is here monocellular and is little perturbed because of the continuous heating. It was also noted the formation of thermal stratification which is not as quickly destroyed as in the case of prescribed variable wall temperature. © Elsevier, Paris.

convection / Newtonian liquid / vertical cylinder / finite differences / upwind scheme / thermal stratification

**Résumé** — Le présent travail a pour but de déterminer numériquement et d'analyser les champs dynamiques et thermiques qui résultent de la convection naturelle dans des cylindres verticaux partiellement remplis de liquide. La méthode des différences finies a été utilisée pour résoudre les équations régissant ces écoulements. Ces équations étaient sujettes à deux conditions aux limites différentes : dans le premier cas, on a imposé une température qui varie sinusoidalement sur toutes les parois du cylindre et, dans le second cas, un flux de chaleur sinusoidal. Dans le cas d'une température pariétale variable, on a remarqué que l'écoulement devient de plus en plus complexe et passe d'une structure monocellulaire, au début de la période, à une structure multicellulaire, à la fin de la période, provoquée par les différences de température qui naissent au sein du fluide. Aussi, malgré l'imposition de la même température sur toutes les parois, on a constaté que la majorité de la chaleur s'échange à travers la paroi transversale du cylindre. Dans le cas d'un flux pariétal variable, on a prédit un transfert local de chaleur presque constant à travers les différentes surfaces du cylindre et un transfert moyen supérieur à travers la paroi transversale. L'écoulement est ici monocellulaire et est peu perturbé, car il y a apport continu de chaleur. On a aussi noté la formation d'une stratification thermique, qui n'est pas détruite aussi rapidement que dans le cas d'une température pariétale variable. © Elsevier, Paris.

convection / liquide newtonien / cylindre vertical / différences finies / schéma amont / stratification thermique

## Nomenclature

$b$	hauteur du liquide . . . . .	m	$q$	densité de flux thermique . . . . .	$W \cdot m^{-2}$
$g$	accélération de la pesanteur . . . . .	$m \cdot s^{-2}$	$r$	distance radiale . . . . .	m
$k$	conductivité thermique . . . . .	$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$	$R$	distance radiale adimensionnelle	
			$R_0$	rayon du cylindre . . . . .	m
			$t$	temps . . . . .	s
			$T$	température . . . . .	K ou °C
			$u$	vitesse axiale . . . . .	$m \cdot s^{-1}$
			$U$	vitesse axiale adimensionnelle	
			$v$	vitesse radiale . . . . .	$m \cdot s^{-1}$

\* Correspondance et tirés à part.

Cet article fait suite à une communication présentée par les auteurs aux 8<sup>es</sup> JITH, qui se sont tenues à Marseille du 7 au 10 juillet 1997.

$V$	vitesse radiale adimensionnelle	
$x$	distance axiale.....	m
$X$	distance axiale adimensionnelle	
$Pr$	Nombre de Prandtl	
$Nu$	Nombre de Nusselt	
$Gr$	Nombre de Grashof	

*Symbols grecs*

$\alpha$	diffusivité thermique.....	$m^2 \cdot s^{-1}$
$\beta$	coefficient d'expansion thermique..	$K^{-1}$
$\mu$	viscosité dynamique du fluide.....	$kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$
$\nu$	viscosité cinématique du fluide....	$m^2 \cdot s^{-1}$
$\theta$	température adimensionnelle	
$\tau$	temps adimensionnel	
$\omega$	vorticité.....	$m^{-1} \cdot s^{-1}$
$\Omega$	vorticité adimensionnelle	
$\psi$	fonction de courant.....	$m^3 \cdot s^{-1}$
$\Psi$	fonction de courant adimensionnelle	

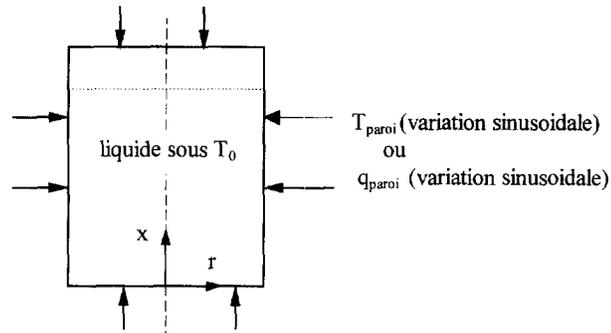


Figure 1. Représentation schématique du système étudié.  
Figure 1. Schematic representation of the studied system.

$\theta = (T - T_0)/(T_{w,max} - T_0)$ ,  $T_{w,max}$  étant la valeur maximale de la température pariétale, les équations à résoudre sont :

- équation de l'énergie :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial R} = \frac{1}{Pr} \left( \frac{R_0^2}{b^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial R} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} \right) \quad (1)$$

- équation de la vorticité :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \Omega}{\partial R} = \frac{R_0}{b} Gr \frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial R} + \left( \frac{R_0^2}{b^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{3}{R} \frac{\partial \Omega}{\partial R} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial R^2} \right) \quad (2)$$

- équation de la fonction de courant :

$$\frac{R_0^2}{b^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} = \Omega R^2 \quad (3)$$

où :

$$U = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} ; V = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial X} \quad (4)$$

$Pr = \nu/\alpha$  (nombre de Prandtl) ;

$$Gr = \frac{g \beta R_0^3 (T_{w,max} - T_0)}{\nu^2} \text{ (nombre de Grashof).}$$

Dans le cas d'un flux de chaleur pariétal variable,  $\theta$  est défini par :  $\theta = g \beta R_0^4 (T - T_0)/\nu \alpha b$  et l'équation (2) doit être remplacée par :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \Omega}{\partial R} = \frac{1}{Pr} \frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial R} + \left( \frac{R_0^2}{b^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{3}{R} \frac{\partial \Omega}{\partial R} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial R^2} \right) \quad (5)$$

Les fonctions et les variables adimensionnelles dans les équations ci-dessus ont été définies comme suit :

$$X = x/b, R = r/R_0, U = u R_0^2/b\nu, V = v R_0^2/b\nu, \tau = t\nu/R_0^2, \Omega = R_C^4 \omega/\nu b, \Psi = \psi/b\nu \quad (6)$$

## 1. INTRODUCTION

La convection naturelle dans les enceintes fermées présente un grand intérêt, du fait de ses nombreuses applications industrielles dans différents domaines : habitat (briques creuses, doubles-vitrages), centrales nucléaires (caissons de réacteurs), énergétique solaire (chaudières, insolateurs plans, réservoirs de stockage thermique), électronique (refroidissement des circuits), alimentation (pasteurisation du lait, des boissons en boîtes), etc.

Plusieurs études ont été menées dans ce domaine : Evans [1] a effectué des études expérimentales de transfert de chaleur dans des liquides contenus dans des enceintes verticales et horizontales. Les investigations de Schinkel [2] et de Linthorst [3] se sont focalisées sur le transfert de chaleur par convection naturelle dans les collecteurs solaires à plaques planes. D'excellentes revues bibliographiques concernant la convection naturelle laminaire dans les enceintes ont été publiées par Ostrach [4] et Catton [5]. Henkes [6] présente des simulations numériques pour l'écoulement laminaire dans une cavité. Ostrach [7] présente une revue bibliographique des écoulements naturels convectifs internes dans diverses géométries.

Le présent travail s'intéresse à la modélisation par la méthode des différences finies de l'écoulement et du transfert thermique provoqués par la convection naturelle vers un liquide à travers les parois d'une enceinte cylindrique (figure 1).

## 2. MODÈLE MATHÉMATIQUE

### 2.1. Équations résolues

Dans le cas d'une température pariétale variable, où la température adimensionnelle est définie par

où  $b$  est la hauteur du liquide,  $g$  l'accélération de la pesanteur,  $r$  la distance radiale,  $R_0$  le rayon du cylindre,  $t$  le temps,  $u$  la vitesse axiale,  $v$  la vitesse radiale,  $x$  la distance axiale,  $\alpha$  la diffusivité thermique,  $\beta$  le coefficient d'expansion thermique,  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide,  $\omega$  la vorticité et  $\psi$  la fonction de courant.

## 2.2. Conditions aux limites et initiales

Les conditions aux limites sur les composantes adimensionnelles de la vitesse  $U = U(X, R, \tau)$  et  $V = V(X, R, \tau)$  sont :

$$\begin{aligned} U(1, R, \tau) = \frac{\partial V}{\partial X}(1, R, \tau) = 0 ; \\ \frac{\partial U}{\partial R}(X, 0, \tau) = V(X, 0, \tau) = 0 \\ U(0, R, \tau) = V(0, R, \tau) = 0 ; U(X, 1, \tau) = V(X, 1, \tau) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Les conditions aux limites sur la température  $\Theta = \Theta(X, R, \tau)$  sont :

- cas où la température adimensionnelle des parois varie sinusoidalement entre 0 et 1 :

$$\begin{aligned} \Theta(X, 1, \tau) = \Theta(0, R, \tau) = \Theta(1, R, \tau) = \frac{1}{2}(1 + \sin[\pi t/450]) \\ \frac{\partial \Theta}{\partial R}(X, 0, \tau) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

- cas où les parois sont traversées par un flux sinusoidal de densité maximale  $q$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial R}(X, 1, \tau) = -\frac{R_0}{b} \frac{\partial \Theta}{\partial X}(0, R, \tau) = \frac{R_0}{b} \frac{\partial \Theta}{\partial X}(1, R, \tau) \\ = \frac{R_0}{b} Pr Gr^* = \frac{q}{2}(1 + \sin[\pi t/450]) \\ \frac{\partial \Theta}{\partial R}(X, 0, \tau) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

où  $Gr^* = \frac{g \beta R_0^4}{k \nu^2} q$ ,  $k$  étant la conductivité thermique.

Les conditions sur la fonction de courant sont :

$$\begin{aligned} \Psi(0, R, \tau) = \Psi(1, R, \tau) = \Psi(X, 0, \tau) = \Psi(X, 1, \tau) = 0 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial X}(0, R, \tau) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}(1, R, \tau) = \frac{\partial}{\partial R} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R}(X, 0, \tau) \right] \\ = \frac{\partial \Psi}{\partial R}(X, 1, \tau) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Les conditions sur la vorticité sont :

$$\Omega(1, R, \tau) = \Omega(X, 0, \tau) = 0 \quad (11)$$

Les conditions initiales utilisées sont :

$$\begin{aligned} \Theta(X, R, 0) = U(X, R, 0) = V(X, R, 0) \\ = \Psi(X, R, 0) = \Omega(X, R, 0) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

## 3. DISCRÉTISATION DES ÉQUATIONS

Les équations ci-dessus ont été résolues après discrétisation par la méthode des différences finies. Un schéma amont a été utilisé pour approcher les dérivées premières par rapport à la direction dominante de l'écoulement  $X$ . Ainsi, lorsque les composantes  $U$  et  $V$  de la vitesse sont positives, des différences à droite sont utilisées pour approcher ces dérivées ; dans le cas contraire, on utilise les différences à gauche :

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{f(X + \Delta X, R, \tau) - f(X, R, \tau)}{\Delta X} + O(\Delta X) \quad (13)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{f(X, R, \tau) - f(X - \Delta X, R, \tau)}{\Delta X} + O(\Delta X) \quad (14)$$

Les discrétisations des termes contenant les dérivées premières par rapport à  $R$ , tels que :  $\frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial R}$ ,  $\frac{3}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R}$  et  $\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R}$ , ont été basées sur les différences centrées ; ainsi :

$$\frac{\partial f}{\partial R} = \frac{f(X, R + \Delta R, \tau) - f(X, R - \Delta R, \tau)}{2 \Delta R} + O(\Delta R^2) \quad (15)$$

Les dérivées du second ordre ont été toutes approchées à l'aide des différences centrées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = \frac{f(X + \Delta X, R, \tau) - 2f(X, R, \tau) + f(X - \Delta X, R, \tau)}{\Delta X^2} \\ + O(\Delta X^2) \end{aligned} \quad (16)$$

La dérivée première par rapport au temps a été approchée par les différences à droite :

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{f(\tau + \Delta \tau) - f(\tau)}{\Delta \tau} + O(\Delta \tau) \quad (17)$$

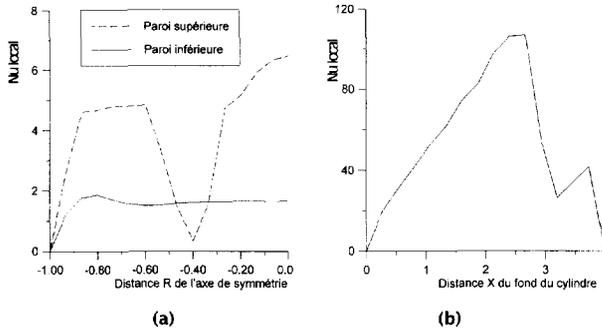
## 4. PROCÉDURE DE CALCUL

Les étapes du calcul sont les suivantes :

- 1) on choisit un pas de temps  $\Delta \tau$  ;
- 2) on calcule la distribution des températures à l'aide de l'équation (1) ;
- 3) connaissant la température à l'instant  $\tau$  et la distribution des vorticités à l'instant précédent, on calcule à l'aide de l'équation (2) la distribution de la vorticité à l'intérieur du cylindre, à l'exception des frontières ;
- 4) la distribution des vorticités ainsi calculée est introduite dans l'équation (3), que l'on résout par la méthode de surrelaxation, le critère de convergence utilisé étant :

$$\sum \sum \left| \Psi_{i,j}^k - \Psi_{i,j}^{k-1} / \sum \Psi_{i,j}^{k-1} \right| \leq \varepsilon \quad (18)$$

où  $\varepsilon$  est le critère de convergence, soit  $\varepsilon = 10^{-4}$  ;



**Figure 2.** Variation du nombre de Nusselt local sur les trois parois du cylindre au temps  $t = 400$  s.  
**Figure 2.** Variation of local Nusselt number on the three walls of the cylinder at time  $t = 400$  s.

5) on calcule la vorticité sur les frontières à l'aide des équations suivantes, qui proviennent de la discrétisation des conditions aux limites :

$$\Omega_{i,N+1} = (8\Psi_{i,N} - \Psi_{i,N-1})/2\Delta R \quad (19)$$

$$\Omega_{1,j} = \frac{R_0^2}{2b^2} \frac{1}{R^2} \frac{8\Psi_{2,j} - \Psi_{3,j}}{\Delta X^2} \quad (20)$$

où  $N + 1$  est l'indice  $j$  de la frontière ;

6) le champ des fonctions de courant étant calculé, les expressions suivantes, dont l'erreur de troncature est d'ordre  $O(\Delta X^3)$  sont utilisées pour obtenir les composantes de la vitesse  $U$  et  $V$  en chaque nœud du maillage :

$$U_{i,j} = (\Psi_{i,j-2} - 8\Psi_{i,j-1} + 8\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j+2})/12R\Delta R \quad (21)$$

$$V_{i,j} = (\Psi_{i+2,j} - 8\Psi_{i+1,j} + 8\Psi_{i-1,j} - \Psi_{i-2,j})/12R\Delta X \quad (22)$$

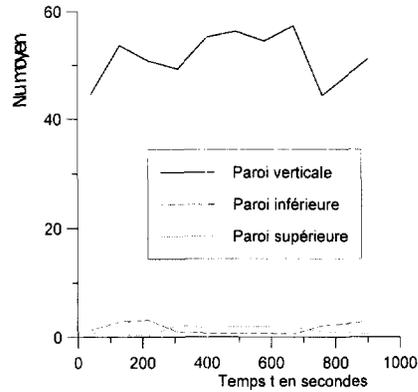
## 5. RÉSULTATS ET DISCUSSION

Les résultats numériques ont été obtenus en utilisant les propriétés physiques à la température initiale du liquide (eau), fixée à 22 °C. Les calculs ont été effectués sur un Pentium 90S à l'aide d'un maillage  $16 \times 16$ .

### 5.1. Cas où la température des parois varie sinusoidalement

Pour un nombre de Grashof  $Gr$  de  $10^8$ , les variations des nombres de Nusselt locaux sont donnés sur la figure 2 pour le temps  $t = 400$  s, tandis que les variations du nombre de Nusselt moyen en fonction du temps à travers une période sont reportées sur la figure 3. Les

nombres de Nusselt locaux sont presque constants sur le fond du cylindre et présentent deux valeurs maximales sur la paroi supérieure. Les valeurs les plus élevées se trouvent sur les parois latérales, atteignant plus de 20 fois la valeur sur les autres parois. De même, la figure 3 montre que les échanges de chaleur entre la paroi verticale et le fluide sont très importants par rapport aux autres échanges (paroi inférieure-fluide et paroi supérieure-fluide). Les nombres de Nusselt moyens fluctuent avec le temps, mais pas selon une fonction périodique, comme dans le cas de la température imposée.

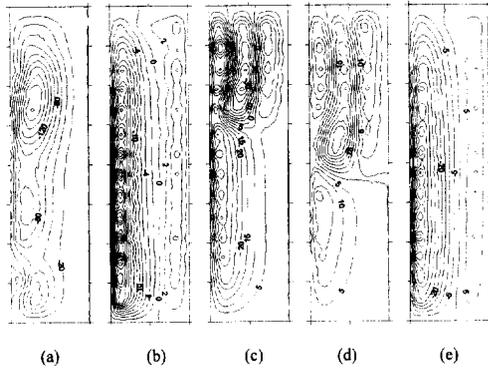


**Figure 3.** Variation en fonction du temps du nombre de Nusselt moyen sur les trois parois du cylindre.  
**Figure 3.** Variation as a function of time of the average Nusselt number on the three walls of the cylinder.

Les lignes de courant et les isothermes sont données respectivement sur les figures 4 et 5 à travers une période. On constate qu'aux premiers instants de l'écoulement dans la couche limite hydrodynamique adjacente à la paroi verticale du cylindre, les particules du fluide se déplacent vers le haut par suite de l'action de la force de flottabilité et à cause du fait que le fluide est plus froid que la paroi. Le mouvement change ensuite progressivement de direction lorsque la température imposée devient inférieure à celle du fluide déjà réchauffé au début. Dans ce cas, les particules suivent un mouvement descendant, parallèlement à l'axe du cylindre.

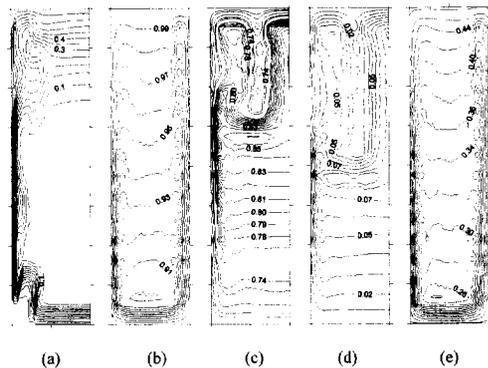
L'écoulement atteint sa complexité maximale durant la fin de la période, où les différences de température au sein du fluide engendrent quatre îlots tournant dans des sens contraires. L'élévation progressive de température après cette période restitue la structure de l'écoulement vers une structure proche de celle du début.

La figure 5 présente la formation d'une stratification thermique durant le premier quart de la période, qui est ensuite détruite lors du deuxième et troisième quart, puis reconstruite juste avant le début de la période suivante.



**Figure 4.** Lignes de courant dans le cas d'une température pariétale variable. (a)  $t = 40$  s ; (b)  $t = 220$  s ; (c)  $t = 400$  s ; (d)  $t = 670$  s ; (e)  $t = 900$  s.

**Figure 4.** Streamlines in the case of variable wall temperature. (a)  $t = 40$  s ; (b)  $t = 220$  s ; (c)  $t = 400$  s ; (d)  $t = 670$  s ; (e)  $t = 900$  s.



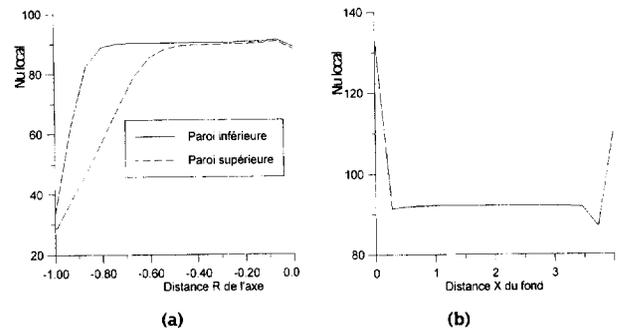
**Figure 5.** Isothermes dans le cas d'une température pariétale variable. (a)  $t = 40$  s ; (b)  $t = 220$  s ; (c)  $t = 400$  s ; (d)  $t = 670$  s ; (e)  $t = 900$  s.

**Figure 5.** Isotherms in the case of variable wall temperature. (a)  $t = 40$  s ; (b)  $t = 220$  s ; (c)  $t = 400$  s ; (d)  $t = 670$  s ; (e)  $t = 900$  s.

## 5.2. Cas où un flux de chaleur variable traverse les parois du cylindre

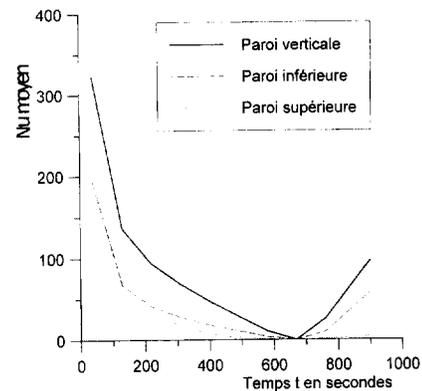
Les calculs ont été effectués pour un nombre de Grashof  $Gr^*$  de  $10^6$ . Les variations du nombre de Nusselt local en  $t = 220$  s sont reportées sur la *figure 6*. Leurs valeurs sont presque constantes sur toutes les surfaces ( $\sim 90$ ). La variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du temps est donnée sur la *figure 7*, sur laquelle on remarque que le transfert est plus intense à travers la paroi latérale. La diminution du nombre de Nusselt a lieu durant les trois quarts de la période, après quoi son augmentation commence.

Les lignes de courant et les isothermes pour ce cas sont représentées respectivement sur les *figures 8* et *9*. L'écoulement est peu perturbé, car il y a échauffement



**Figure 6.** Variation du nombre de Nusselt local sur les trois parois du cylindre au temps  $t = 220$  s, dans le cas d'un flux pariétal variable.

**Figure 6.** Variation of the local Nusselt number on the three walls of the cylinder at time  $t = 220$  s, for the case of variable wall heat flux.



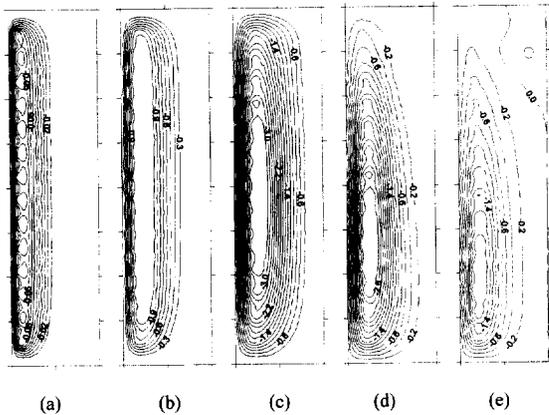
**Figure 7.** Variation en fonction du temps du nombre de Nusselt moyen sur les trois parois du cylindre, dans le cas d'un flux pariétal variable.

**Figure 7.** Variation as a function of time of the average Nusselt number on the three walls of the cylinder, for the case of variable wall heat flux.

progressif du liquide : les particules de fluide montent le long de la paroi latérale du cylindre et descendent le long de son axe. La stratification thermique est apparente sur la *figure 9*, la zone la moins chauffée étant celle qui est proche du fond du cylindre.

## 6. CONCLUSION

Les transferts de quantité de mouvement et de chaleur, par convection naturelle, à l'intérieur d'un cylindre vertical partiellement rempli de liquide ont été déterminés numériquement. L'écoulement est complexe, surtout dans le cas d'une température pariétale variable. La méthode mise au point peut aider à résoudre nombre de problèmes pratiques concernant les isolateurs plans, les doubles vitrages, les stockages de chaleur, etc.



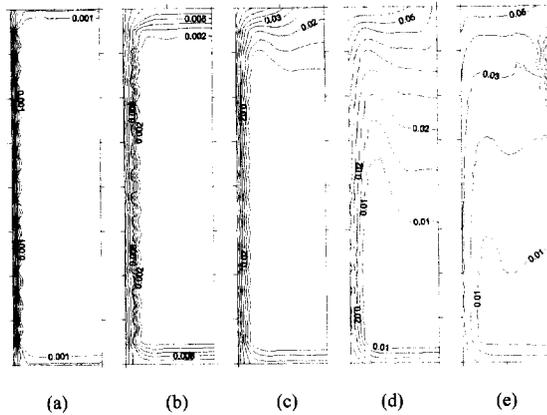
**Figure 8.** Lignes de courant dans le cas d'un flux thermique pariétal variable. (a)  $t = 40$  s ; (b)  $t = 220$  s ; (c)  $t = 400$  s ; (d)  $t = 670$  s ; (e)  $t = 900$  s.

**Figure 8.** Streamlines for the case of variable wall heat flux. (a)  $t = 40$  s ; (b)  $t = 220$  s ; (c)  $t = 400$  s ; (d)  $t = 670$  s ; (e)  $t = 900$  s.

Les calculs ont été présentés pour un seul nombre de Grashof. L'augmentation de celui-ci dans le cas d'une température variable entraînerait une complexité plus grande de l'écoulement, tandis que, dans le cas d'un flux pariétal variable, le fluide s'échaufferait plus vite, tout en conservant la même structure d'écoulement.

### RÉFÉRENCES

[1] Evans L.B., Stefany N.E., Chem. Eng. Progr. Symposium Series No. 64, 1966.  
 [2] Schinkel W.M.M., Natural convection in inclined air-filled enclosures, thèse, Delft University of Technology, Faculty of Applied Physics, Pays-Bas, 1980.



**Figure 9.** Isothermes dans le cas d'un flux thermique pariétal variable. (a)  $t = 40$  s ; (b)  $t = 220$  s ; (c)  $t = 400$  s ; (d)  $t = 670$  s ; (e)  $t = 900$  s.

**Figure 9.** Isotherms for the case of variable wall heat flux. (a)  $t = 40$  s ; (b)  $t = 220$  s ; (c)  $t = 400$  s ; (d)  $t = 670$  s ; (e)  $t = 900$  s.

[3] Linthorst S.J.M., Natural convection suppression in solar collectors, thèse, Delft University of Technology, Faculty of Applied Physics, Pays-Bas, 1985.  
 [4] Ostrach S., Natural convection in enclosures, in: Hartnett et Irvine (éds), Advances in Heat Transfer, vol. 8, Academic Press, 1972.  
 [5] Catton I., Natural convection in enclosures, in: Proc. 6th Int. Heat Transfer Conf., vol. 6, 1978, p. 13.  
 [6] Henkes R.A.W.M., Natural-convection boundary layers, thèse, Delft University of Technology, Faculty of Applied Physics, Pays-Bas, 1990.  
 [7] Ostrach S., Natural convection in enclosures, J. Heat Trans.-T. ASME 110 (1988) 1175.

### Abridged English Version

#### Numerical simulation of natural convection of a liquid under variable boundary conditions

Natural convection in enclosures has numerous industrial applications in various domains: building (hollow bricks, double glazing...), nuclear power stations (caissons of reactors), solar energy (boilers, plane solar collectors), electronic industry (cooling of circuits), food industry (pasteurization of milk, of drinks in cans), etc.

Many studies have been undertaken in this field: Evans [1] studied experimentally heat transfer in liquids contained in vertical and horizontal enclosures. The investigations of Schinkel [2] and Linthorst [3] have concentrated on natural convection heat transfer in plane plate solar collectors. Excellent literature reviews concerning laminar natural convection in enclousures have been written by Ostrach [4] and Catton [5].

In his thesis, Henkes [6] presents numerical simulations for laminar natural convective flow in a cavity. Ostrach [7] presents a literature review on internal natural convection flows in various geometries.

The present work uses the finite difference method to simulate the flow and heat transfer provoked by natural convection to a liquid through the walls of a cylindrical enclosure (figure 1). The mathematical model consists of three partial differential equations: those of energy (equation (1)), vorticity (equations (2), in the case of variable wall temperature, or equation (5), in the case of variable heat flux), and streamfunction

(equation (3)), which have been solved subject to the boundary conditions given by equations (7), (10), (11) and equation (8) (case of variable temperature) or equation (9) (case of variable heat flux). The initial conditions used are those given by equation (12).

In order to ensure a stable numerical solution of the model equations, the first derivatives with respect to  $X$  (direction along which the flow is dominant) have been discretized using an upwind scheme: thus, when the components  $U$  and  $V$  are positive, forward differences are used (equation (13)) and, when they are negative, backward differences are used (equation (14)). Central differencing has been used for the remaining derivatives in the equations, i.e. the first derivatives with respect to  $R$  and the second derivatives (equations (15) and (16)). The time derivative of all flow variables has been approximated by a forward differencing scheme (equation (17)).

The calculation procedure is as follows:

- a time step  $\Delta\tau$  is chosen;
- temperature distribution at time  $\tau = \tau_0 + \Delta\tau$  is obtained from the discretized version of equation (1);
- the new temperature field along with the vorticity distribution at time  $\tau_0$  are used in the discretized version of equation (2) or equation (5) (depending on the type of boundary condition) to calculate vorticity distribution at time  $\tau$  in the internal grid nodes;
- the new vorticity field is then used to obtain the streamfunction distribution from the discretized version of equation (3); the solution of the resulting set of algebraic equations was done by the successive overrelaxation (SOR) method; the iterations were stopped when the convergence criterion was satisfied (equation (18));
- vorticity on the boundaries is then calculated using equations (19) and (20), which stem from the discretization of the boundary conditions;
- once the streamfunction distribution has been found, third order expressions (21) and (22) are used to obtain the velocity field.

Numerical results have been obtained using the fluid properties at the initial temperature of 22 °C.

### Case where the wall temperature varies sinusoidally

For a Grashof number  $Gr$  of  $10^8$ , the local Nusselt number variations are shown in *figure 2* for the time  $t = 400$  s, whereas the average Nusselt number variation with time over a period is displayed in *figure 3*. The local

Nusselt number is nearly constant on the bottom of the cylinder and presents two maximal values on the top wall. The largest values are found on the lateral walls reaching more than 20 times the value on the other walls. Also, *figure 3* shows that heat exchange between the vertical wall and the fluid are very important when compared to exchanges with other walls (i.e. bottom wall–fluid and top wall–fluid). The average Nusselt numbers fluctuate with time, but not according to a periodic function, like the wall temperature.

The streamlines and isotherms are shown respectively in *figures 4* and *5* throughout a period. One can note that at the onset of the flow, fluid particles in the hydrodynamic boundary layer next to the vertical wall, move upwards because of the buoyancy force and the fact that the fluid is cooler than the wall. The flow changes afterwards its direction when the imposed wall temperature becomes less than that of the fluid. In this case, the particles follow a descending trajectory parallel to the cylinder axis. The flow reaches its maximum complexity towards the end of the period when the differences in temperature inside the fluid give birth to four counter-rotating eddies. The progressive increase in temperature after this period restores the structure of the flow to its initial state.

*Figure 5* shows thermal stratification during the first quarter of the period, which is then destroyed during the second and third quarters, and reconstructed just before the start of the following period.

### Case where the wall heat flux varies sinusoidally

Predictions have been performed for a Grashof number  $Gr^*$  of  $10^6$ . Local Nusselt numbers at  $t = 220$  s are shown in *figure 6*. Their values are nearly constant throughout all surfaces ( $\sim 90$ ). The average Nusselt number variation with time is shown in *figure 7*, where one can note that the transfer is more intense through the lateral wall. The decrease of the Nusselt number takes place during the first three quarters of the period, after which it starts to increase once again.

Streamfunction contours and isotherms for this case are shown respectively in *figures 8* and *9*. The flow structure is little affected in this case as time progresses because there is progressive heating of the liquid: fluid particles climb along the lateral wall of the cylinder and come down along the axis. Thermal stratification is clearly seen in *figure 9*, the region least heated being that next to the bottom of the cylinder.

